2.29 a)

$$(D-\lambda I)^k[f(x)e^{\lambda x}] = f^{(k)}(x)\, e^{\lambda x}$$

Por inducción, pruebo con $m=1$ y $m=k+1$:

Pruebo para $m=1$

$$(D-\lambda I)[F(x)e^{\lambda x}] = D[F(x)e^{\lambda x}] - \lambda F(x)e^{\lambda x} =$$

$$= F'(x)e^{\lambda x} + \cancel{\lambda F(x)e^{\lambda x}} - \cancel{\lambda F(x)e^{\lambda x}} = F^{(1)}(x)e^{\lambda x}$$ ✓

Ahora pruebo p/ $m=k+1$:

$$(D-\lambda I)^{k+1}[f(x)e^{\lambda x}] = (D-\lambda I)[(D-\lambda I)^{k}[f(x)e^{\lambda x}]] \quad \textcircled{\Delta}$$

Si por hipótesis, la igualdad vale para ~~k~~ $n=k$ entonces:

$$(D-\lambda I)^{k}[f(x)e^{\lambda x}] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

Por lo tanto, usando esto en $\textcircled{\Delta}$

$$\rightarrow = (D-\lambda I)[f^{(k)}(x)e^{\lambda x}] = D[f^{(k)}(x)e^{\lambda x}] - \lambda . f^{(k)}(x)e^{\lambda x} =$$

$$= f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x} + \cancel{\lambda f^{(k)}(x)e^{\lambda x}} - \cancel{\lambda f^{(k)}(x)e^{\lambda x}} = \underline{f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x}} \checkmark$$

Como probé por inducción que se cumple para ~~k~~ $n=1$ y $n=k+1$ entonces se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$.

6) $Nu(D-\lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}$

Pruebo por doble inclusión:

Busco $Nu(D-\lambda I)$, si $f \in Nu(D-\lambda I)$, entonces:

$$(D-\lambda I)[f(x)] = 0$$

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0$$

Resuelvo esta ec:

$p(r) = r - \lambda$, la única raíz es r

entonces $y_H = k_1 e^{rx}$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

y como $Nu(D-\lambda I) \subseteq gen\{e^{\lambda x}\}$

y además son de igual dimensión (=1), no hace falta ver la DOBLE inclusión y finalmente $Nu(D-\lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}$.

c) Si $y \in Nu((D-\lambda I)^k)$:

$(D-\lambda I)^{k+1}[y]=0$, si tomo $z=(D-\lambda I)[y]$, entonces queda:

$(D-\lambda I)^k[z]=0$, en donde por hipótesis $z=p(x)e^{\lambda x}$

$\rightarrow (D-\lambda I)^k[p(x)e^{\lambda x}]=0 \rightarrow$ como vimos en a)

esto equivale a decir:

$p^{(k)}(x)e^{\lambda x}=0$, Por lo tanto el núcleo de $((D-\lambda I)^{k+1})$ lo tendremos en $p^{(k)}(x)\,e^{\lambda x}$, donde $p \in C_k[x]$

d) Por inducción, pruebo con $m=1$ y $m=k+1$:

Para $m=1$ nos queda $\{e^{\lambda x}\}$, y como vimos en 6) $Nu(D-\lambda I) = gen\{e^{\lambda x}\}$ y como $e^{\lambda x} \neq 0$ es LI y por lo tanto es una base de $Nu(D-\lambda I)$

Ahora por c): $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ es base de $Nu((D-\lambda I)^k)$ y $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^k e^{\lambda x}\}$ es base de $Nu((D-\lambda I)^{k+1})$ ya que por lo visto en el ej. 1.15) este conj. es LI.

Por lo tanto, como $\{x^i e^{\lambda x} : i \in [0:k-1]\}$ en $m=k+1$ queda $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^k e^{\lambda x}\}$, lo cual por lo dicho antes, es una base efectivamente de $Nu((D-\lambda I)^{k+1})$

Como probé que se cumple, por inducción, en $m=1$ y $m=k+1$, entonces $\{x^i e^{\lambda x} : i \in [0:k-1]\}$ es una base de $Nu((D-\lambda I)^k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

e) Por a) sabemos que $(D-\lambda I)^k[F(x)e^{\lambda x}] = F^{(k)}(x)e^{\lambda x}$

ahora, $(D-\lambda I)^k[y] = g$, si $y_p = F(x)e^{\lambda x}$, entonces:

$$(D-\lambda I)^k[F(x)e^{\lambda x}] = g$$

Usando lo de a)

$F^{(k)}(x)e^{\lambda x} = g$, y nos dicen que: $F^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$

entonces, reemplazo:

$$ge^{-\lambda x} \cdot e^{\lambda x} = g \rightarrow \frac{g}{\cancel{e^{\lambda x}}} \cdot \cancel{e^{\lambda x}} = g \rightarrow g = g \checkmark$$

Efectivamente admite la $y_p = F(x)e^{\lambda x}$